Geometría Afín y Proyectiva	**PARCIAL 2 (40%)**	**11 Diciembre 2014**
Tiempo: 2 horas		

NOMBRE:

1. (6 puntos). En el espacio proyectivo $\mathbb{P}^3$ se dan los subespacios $S : x_0 + 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$ y T generado por los puntos $(2:-1:0:0)$, $(1:0:0:1)$ y $(2:0:-1:1)$.

a) Calcular las dimensiones de S y de T.

b) Calcular la dimensión y ecuaciones implícitas de $S \cap T$.

a) $\boxed{\dim S = 2}$ porque una sola ecuación con 4 variables es un hiperplano vectorial de $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim_V S = 3$.

$\boxed{\dim T = 2}$ porque:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim_V T = 3.$$

b) Implícitas de T:

$$\begin{pmatrix} x_0 & 2 & 1 & 2 \\ x_1 & -1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & -1 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_0 & 2 & 1 & 2 \\ 2x_1+x_0 & 0 & 1 & 2 \\ x_2 & 0 & 0 & -1 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_0 & 2 & 1 & 2 \\ 2x_1+x_0 & 0 & 1 & 2 \\ x_2 & 0 & 0 & -1 \\ x_3-2x_1-x_0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$x_3 - 2x_1 - x_0 - x_2 = 0$

$$S \cap T : \begin{cases} x_0 + 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_0 + 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Implícitas de $S \cap T$: $\boxed{\begin{cases} x_0 + 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}}$

$$\dim_V S \cap T = 4 - \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{\dim S \cap T = 1}$$

2. (6 puntos). a) Definir referencia proyectiva de $\mathbb{P}^n$.

b) Dadas dos referencias de $\mathbb{P}^1$: $R=\{(1:2),(2:0),(1:1)\}$ y $R'=\{(1:1),(2:0),(2:-1)\}$ calcular la matriz del cambio de R a R'.

a) Una referencia proyectiva de $\mathbb{P}^n$ es un conjunto ordenado de $n+2$ puntos tal que cualquier subconjunto de $n+1$ es independiente.

b) Hallamos bases normalizadas asociadas a las referencias.

$$(1,1) = \frac{1}{2}(1,2) + \frac{1}{4}(2,0) \Rightarrow B = \{(\tfrac{1}{2},1),(\tfrac{1}{2},0)\}$$

$$(2,-1) = -(1,1) + \frac{3}{2}(2,0) \Rightarrow B' = \{(-1,-1),(3,0)\}$$

$$\boxed{C(R,R') = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{C(B_c,B')} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C(B,B_c)} \cdot \rho, \quad \forall \rho \neq 0}$$

3. (6 puntos). a) Definir homografía en $\mathbb{P}^n$.

b) Calcular la matriz de la homografía $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ que transforma los puntos $(1:2),(2:0),(1:1)$ en $(1:1),(2:0),(2:-1)$ respectivamente.

a) Una homografía es una aplicación proyectiva biyectiva.

b) Escogiendo las referencias del ejercicio anterior:

$$\boxed{M\varphi = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{M\varphi(R,R_c)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}}_{C(R_c,R)} \cdot \rho, \quad \forall \rho \neq 0}$$

4. (6 puntos). a) Definir proyección cónica en $\mathbb{P}^n$.

b) Calcular la matriz de la proyección cónica en $\mathbb{P}^2$ de centro $C=(1:1:3)$ sobre la recta $x_0+x_1-2x_2=0$

a) La proyección cónica de centro $C \in \mathbb{P}^n$, $C=[\bar{v}]$, sobre un hiperplano H $(C \notin H)$, es la aplicación proyectiva $\varphi: \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ tal que su aplicación lineal asociada $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ es la proyección sobre $\tilde{H}$ en la dirección de $\bar{v}$, $H = P(\tilde{H})$.

b) Escogiendo la referencia $R = \{(1:1:3), (1:-1:0), (2:0:1); (4:0:4)\}$,

$B = \{\underset{\downarrow\,(0,0,0)}{(1,1,3)}, \underbrace{(1,-1,0), (2,0,1)}_{\text{fijos}}\}$ es una base normalizada de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{M\varphi = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M\tilde{\varphi}(B,B_c)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{C(B_c,B)} \cdot \rho, \ \forall \rho \neq 0}$$

5. (6 puntos). a) Hallar los puntos singulares de la cónica

$$x_0^2 - 2x_1^2 - x_0x_1 + x_0x_2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$$

b) Clasificarla y calcular sus elementos.

a) $P \in C$ es punto singular $\Leftrightarrow M_C \cdot p = 0$.

$$M_C = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -2 & 2 \\ 1/2 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 = p_2 \\ p_0 = 0 \end{matrix}$$

$$\boxed{P = (0:1:-1)}$$

b) Es una cónica degenerada con un punto singular, así que es $\boxed{\text{UN PAR DE RECTAS DISTINTAS}}$

Para calcular las rectas:

$C_\infty: x_0^2 - 2x_1^2 - x_0x_1 = 0$. Para $x_1 = 1$: $x_0^2 - 2 - x_0 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_0 = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ $\qquad P_\infty = (2:1:0)$, $Q_\infty = (-1:1:0)$

Los dos rectas son: $\begin{cases} x_0 - 2x_1 + k \cdot x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 + h \cdot x_2 = 0 \end{cases}$

Sustituyendo el punto $P \Rightarrow k=2, \ h=-1$

$$\boxed{(x_0 - 2x_1 + 2x_2) \cdot (x_0 + x_1 - x_2) = 0}$$

6. (10 puntos). a) Sabiendo que $C: x^2+2xy-4y-3=0$ es una cónica con centro, calcularlo.

b) Definir cónica dual de una cónica y calcular la cónica dual de C.

c) Calcular las tangentes desde $P=(0:1:-1)$ a C, usando la cónica dual.

a) El centro es el polo de la recta del infinito, que tiene ecuación $x_2=0$, y sus coeficientes son: $(0,0,1)$.

Utilizando la relación polo-polar:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-2\\0&-2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c_0\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\1&0&-2&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&-1&-2&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{array}\right)\Rightarrow c_2=1,\ c_1=-2,\ c_0=2$$

$$(2:-2:1)\Rightarrow \boxed{C=(2,-2)}$$

b) La cónica dual de una cónica $C: x^T\cdot M_C\cdot x=0$ es la cónica de ecuación $x^T\cdot M_C^*\cdot x=0$, donde M_C^* es la matriz adjunta de M_C.

$$M_C^*=\begin{pmatrix}-4&3&-2\\3&-3&2\\-2&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C^*: -4a_0^2-3a_1^2-a_2^2+6a_0a_1-4a_0a_2+4a_1a_2=0}$$

c) Si $r: a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$ es una recta tangente a C, sus coeficientes $(a_0:a_1:a_2)$ verifican la ecuación de la cónica dual de C.

$$\begin{cases}-4a^2-3a_1^2-a_2^2+6a_0a_1-4a_0a_2+4a_1a_2=0\\ a_1-a_2=0\quad (P\in r)\end{cases}$$

$$-4a_0^2-\cancel{4a_1^2}+2a_0a_1+\cancel{4a_1^2}\iff 2a_0^2-a_0a_1=0\iff a_0(2a_0-a_1)=0$$

$\iff a_0=0$ ó $a_1=2a_0$. Dos soluciones: $(0:1:1)$ y $(1:2:2)$

Tangentes $\boxed{x_1+x_2=0 \quad y \quad x_0+2x_1+2x_2=0}$